

Relasi Dispersi dalam Pandu Gelombang Planar Nonlinear Kerr

Hengki Tasman¹⁾ dan Edy Soewono^{1,2)}

¹⁾Pusat Penelitian Pengembangan dan Penerapan Matematika, ITB

²⁾Departemen Matematika, ITB

Jl. Ganesa 10 Bandung 40132

e-mail : hengki_tasman@yahoo.com ; esoewono@bdg.centrin.net.id

Abstrak

Dalam makalah ini ditinjau pandu gelombang planar yang di dalamnya terdapat nonlinearitas jenis Kerr. Dengan menggunakan metode indeks bias efektif dan perata-rataan, didapat relasi dispersi dalam bentuk implisit secara analitis untuk pandu gelombang tersebut. Relasi dispersi ini dapat menyederhanakan perhitungan numerik dalam mendapatkan kurva dispersi. Sebagai hasil diperoleh kurva relasi dispersi dengan beberapa model perata-rataan untuk pandu gelombang planar simetrik.

Kata kunci : pandu gelombang planar, nonlinearitas Kerr, relasi dispersi.

Abstract

In this paper planar waveguides with Kerr-type nonlinearity are considered. By using an effective refractive index method and averaging, an implicit dispersion relation is obtained analytically for the waveguides. This dispersion relation can simplify numerical calculation in obtaining dispersion curves. Dispersion relation curves with different averaging schemes for symmetric planar waveguides are shown here.

Keywords : planar waveguide, Kerr-type nonlinearity, dispersion relation.

1. Pendahuluan

Pandu gelombang planar yang di dalam filmnya mengandung materi nonlinear yang bersifat *self-focusing* menghasilkan *self-trapping* pada gelombang dalam arah yang sejajar dengan batas pandu gelombang tersebut. Dalam kasus ini kombinasi profil indeks bias efektif linear dalam satu arah dan indeks bias nonlinear yang diinduksi dalam arah tegak lurus menghasilkan sebuah pandu gelombang efektif dengan potongan melintang dua dimensi. Di samping itu kasus ini menghasilkan solusi yang dikenal sebagai soliton spasial¹⁾.

Dalam literatur pandu gelombang linear, metode indeks bias efektif telah banyak dipakai sebagai suatu prosedur untuk menemukan solusi hampiran bagi struktur pandu gelombang dua dimensi yang rumit¹⁾. Metode ini dipakai untuk menganalisa pandu gelombang planar nonlinear.

Pandu gelombang dapat dikarakterisasi oleh relasi dispersi yang terdapat di dalamnya. Dalam makalah ini akan diturunkan relasi dispersi untuk pandu gelombang planar yang di dalam filmnya terdapat nonlinearitas jenis Kerr. Untuk mendapatkan relasi dispersi ini, mula-mula persamaan gelombang skalar dua dimensi untuk pandu gelombang planar nonlinear tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode indeks bias efektif, kemudian dengan menerapkan perata-rataan didapat relasi dispersi tersebut. Selanjutnya diberikan beberapa contoh pemakaian relasi dispersi tersebut dengan beberapa model perata-rataan dalam pandu gelombang planar simetrik yang di dalam filmnya terdapat nonlinearitas jenis Kerr.

2. Permasalahan

Pandu gelombang planar yang dikaji di sini mempunyai indeks bias yang bervariasi secara tangga (*step index*) dalam arah sumbu Y . Variasi ini dinotasikan dengan $n_y(y)$. Selain itu juga terdapat nonlinearitas jenis Kerr dalam arah sumbu Y , dan dinotasikan dengan $n_2(y)$.

Kita akan meninjau gelombang TE yang merambat di sepanjang pandu gelombang ini (dalam arah sumbu Z). Vektor medan listrik untuk gelombang TE ini mempunyai bentuk $\vec{E} = \psi(x, y) \exp(i(\beta z - \omega t)) \hat{x}$ dimana β adalah konstanta propagasi, ω adalah frekuensi sudut optik. Fungsi $\psi(x, y)$ memenuhi persamaan gelombang skalar dua dimensi berikut

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + [k^2 n_y^2(y) + 2k^2 n_2(y) n_y(y) I(x, y) - \beta^2] \psi = 0, \quad (1)$$

dengan syarat batas berupa kekontinuan ψ dan turunan parsialnya di setiap titik pada batas antara dua lapisan, dimana $k = 2\pi/\lambda$ merupakan bilangan gelombang di ruang hampa, λ adalah panjang gelombang di ruang hampa dan $I(x, y)$ adalah intensitas lokal. Intensitas lokal ini diberikan oleh

$$I(x, y) = \frac{1}{2} c \epsilon_0 n_y(y) \psi^2(x, y), \quad (2)$$

dimana c adalah kecepatan cahaya di ruang hampa, dan ϵ_0 adalah permitivitas ruang hampa.

Untuk menyelesaikan persamaan (1) digunakan metode indeks bias efektif^{1,2)}. Dalam metode ini diasumsikan bahwa ψ dapat dipisah secara parsial dalam

bentuk $\psi(x,y) = \psi_y(y) \psi_{yx}(x,y)$ dan $\psi_{yx}(x,y)$ merupakan fungsi yang *slowly varying* terhadap variabel y , maksudnya perubahan $\frac{\partial \psi_{yx}}{\partial y}$ dibandingkan dengan perubahan ψ_{yx} kecil sekali dalam satu panjang gelombang, sehingga faktor $\frac{\partial^2 \psi_{yx}}{\partial y^2}$ dapat diabaikan. Ide

pengasumsian metode ini adalah membuat hampir semua pengaruh variabel y pada fungsi $\psi_{yx}(x,y)$ diambil alih oleh fungsi $\psi_y(y)$, sehingga pemisahan $\psi(x,y)$ secara parsial ini mirip dengan pemisahan variabel biasa.

Dengan metode ini persamaan gelombang (1) dapat dipisah menjadi

$$\frac{d^2 \psi_y}{dy^2} + [k^2 n_{ef}^2(y) - \beta^2] \psi_y = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 \psi_{yx}}{dx^2} + k^2 [n_y^2(y) + \alpha(y) \psi_y^2(y) \psi_{yx}^2 - n_{ef}^2(y)] \psi_{yx} = 0, \quad (4)$$

dimana $n_{ef}(y)$ adalah indeks bias efektif dan $\alpha(y) = c \varepsilon_0 n_y^2(y) n_2^2(y)$, sedangkan indeks bias efektif kuadratnya adalah

$$n_{ef}^2(y) = n_y^2(y) \left[1 + \frac{n_y^2(y) n_2^2(y) k^4 P^2 \psi_y^4(y)}{4\beta^2} \right], \quad (5)$$

dimana P adalah daya optis. Solusi persamaan (4) dikenal sebagai soliton spasial, namun dalam makalah ini solusi ini tidak dibahas lebih lanjut.

Indeks bias efektif kuadrat tersebut membuat persamaan (3) menjadi nonlinear. Kenonlinearan ini membuat solusi dan relasi dispersi persamaan tersebut sulit didapat secara analitis, sedangkan pendekatan numerik yang dilakukan dengan mempartisi dimensi ketebalan film dan melinearkan indeks bias efektif kuadrat di setiap sub intervalnya¹⁾ akan membuat kerumitan dalam pengadopsian syarat batas.

Dalam makalah ini diturunkan pendekatan analitis yang lebih sederhana dengan merata-ratakan indeks bias efektif kuadrat. Dalam hal ini pengaruh perubahan indeks bias efektif kuadrat pada arah y tidak ditinjau titik demi titik, tetapi dalam dimensi ketebalan film. Dengan melakukan perata-rataan ini, maka persamaan (3) menjadi linear dan dapat diperoleh relasi dispersi secara analitis.

Indeks bias efektif kuadrat (5) dirata-rata dengan merata-ratakan $\psi_y^4(y)$ sebagai berikut

$$\hat{n}_{ef}^2(y) = n_y^2(y) \left[1 + \frac{n_y^2(y) n_2^2(y) k^4 P^2 \hat{\psi}_y^4(y)}{4\beta^2} \right], \quad (6)$$

dimana $\hat{\psi}_y^4(y)$ menyatakan hasil perata-rataan dari $\psi_y^4(y)$.

3. Penurunan Relasi Dispersi dan Analisa Perata-rataan

Misal indeks bias pandu gelombang tersebut adalah

$$n_y(y) = \begin{cases} n_c & ; \quad d < y < \infty \\ n_f & ; \quad 0 < y < d \\ n_s & ; \quad -\infty < y < 0 \end{cases},$$

dimana d adalah ketebalan film, n_c adalah indek bias *cladding*, n_f adalah indeks bias film, dan n_s adalah indeks bias substrat, serta koefisien nonlinear jenis Kerr sebagai berikut

$$n_2(y) = \begin{cases} n_2 & ; \quad 0 < y < d \\ 0 & ; \quad \text{lainnya} \end{cases}.$$

Dengan perata-rataan (6) di atas, persamaan (3) dapat ditulis menjadi

$$\frac{d^2 \psi_y}{dy^2} + [k^2 \hat{n}_{ef}^2(y) - \beta^2] \psi_y = 0. \quad (7)$$

Persamaan (7) di atas mempunyai solusi

$$\psi_y(y) = \begin{cases} \psi_{yc}(y) = [a \cos(w_f d) + b \sin(w_f d)] \exp(w_c d) \exp(-w_c y) \\ \psi_{yf}(y) = a \cos(w_f y) + b \sin(w_f y) \\ \psi_{ys}(y) = a \exp(w_s y) \end{cases}, \quad (8)$$

dimana $\psi_{yc}(y)$ adalah solusi di lapisan *cladding*, $\psi_{yf}(y)$ adalah solusi di lapisan film, $\psi_{ys}(y)$ adalah solusi di lapisan substrat, sedangkan $w_f = k \sqrt{\hat{n}_{ef}^2 - B^2}$, $w_c = k \sqrt{B^2 - n_c^2}$, dan $w_s = k \sqrt{B^2 - n_s^2}$, dimana $B = \beta/k$ adalah indeks modulus.

Perlu diperhatikan bahwa pemilihan $\psi_y(y)$ di atas telah memasukan syarat batas kontinuitas $\psi_y(y)$ di setiap titik pada batas antara dua lapisan. Akibatnya syarat batas untuk persamaan (7) tinggal kontinuitas turunan $\psi_y(y)$ di setiap titik pada batas antara dua lapisan di pandu gelombang tersebut.

Untuk mendapatkan relasi dispersi pandu gelombang cukup ditinjau persamaan di lapisan film, yaitu

$$\frac{\partial^2 \psi_{yf}}{\partial y^2} + w_f^2 \psi_{yf} = 0, \quad (9)$$

dengan syarat batas $\frac{d\psi_{yf}(0)}{dy} = \frac{d\psi_{ys}(0)}{dy}$ dan

$$\frac{d\psi_{yf}(d)}{dy} = \frac{d\psi_{yc}(d)}{dy}, \text{ serta indeks bias efektif kuadrat}$$

$$\hat{n}_{ef}^2(y) = n_f^2 \left[1 + \frac{n_f^2 n_2^2 k^4 P^2 \hat{\psi}_y^4(y)}{4B^2} \right]. \quad (10)$$

Dengan mengolah kedua syarat batas di atas, didapat relasi dispersi untuk $P = 0$ sebagai berikut

$$\cot(kd\sqrt{n_f^2 - B^2}) = \frac{n_f^2 - 2B^2 + n_c^2}{2\sqrt{n_f^2 - B^2}\sqrt{B^2 - n_c^2}} \quad (11)$$

sedangkan untuk $P \neq 0$ relasi dispersinya adalah

$$\cot\left[\frac{kd\sqrt{4B^2(n_f^2 - B^2) + (n_2kP)^2(n_f\hat{\psi}_y)^4}}{2B}\right] = \frac{4B^2(n_c^2 + n_f^2 - 2B^2) + (n_2kP)^2(n_f\hat{\psi}_y)^4}{4B\sqrt{B^2 - n_c^2}\sqrt{4(n_f^2 - 1)B^2 + (n_2P)^2(n_f\hat{\psi}_y)^4}} \quad (12)$$

Nilai B untuk pandu gelombang tersebut didapat dari titik potong antara fungsi di ruas kiri dan fungsi di ruas kanan dari kedua relasi dispersi di atas.

Untuk $P = 0$, relasi dispersi (11) tidak terpengaruh oleh perata-rataan yang dilakukan. Namun untuk $P \neq 0$, perata-rataan yang dilakukan akan berpengaruh pada relasi dispersi (12).

Ruas kiri relasi dispersi (12) merupakan fungsi yang monoton naik (dengan domain B). Jika $\hat{\psi}_y^4$ yang dipakai makin besar, maka fungsi tersebut akan bergeser ke kanan. Namun jika $\hat{\psi}_y^4$ yang dipakai makin kecil, maka fungsi tersebut akan bergeser ke kiri.

Ruas kanan relasi dispersi (12) merupakan fungsi yang monoton turun. Jika $\hat{\psi}_y^4$ yang dipakai makin besar, maka fungsi tersebut akan bergeser ke kanan. Namun jika $\hat{\psi}_y^4$ yang dipakai makin kecil, maka fungsi tersebut akan bergeser ke kiri.

Jadi jika $\hat{\psi}_y^4$ yang dipakai makin besar, maka titik potong kedua fungsi tersebut akan bergeser ke kanan, sehingga nilai B lebih besar, sedangkan jika $\hat{\psi}_y^4$ yang dipakai makin kecil, maka titik potong kedua fungsi tersebut akan bergeser ke kiri, sehingga nilai B lebih kecil.

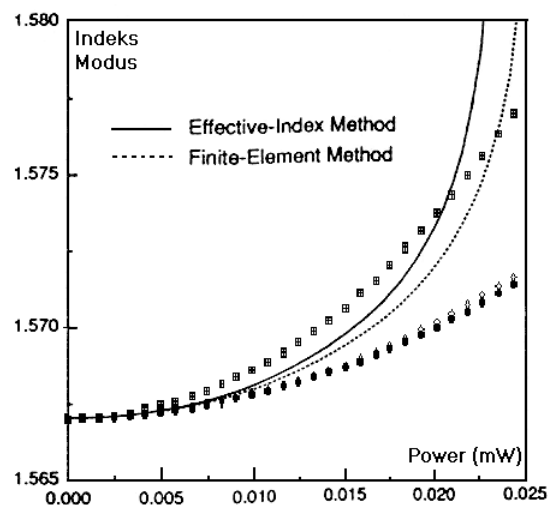
4. Beberapa contoh

Pada bagian ini diberikan beberapa kurva dispersi untuk gelombang TE modus 0 yang didapat dengan menggunakan relasi dispersi (12) dan dibandingkan dengan kurva dispersi yang didapat dari rujukan¹⁾. Selain itu juga diberikan pendekatan relasi dispersi dengan menggunakan ekspansi Taylor pada relasi dispersi tersebut di sekitar $P = 0$ mW.

Parameter pandu gelombang planar yang digunakan di sini adalah $d = 2 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,515 \mu\text{m}$, $n_c = 1,55$, $n_f = 1,57$, $n_s = 1,55$, $n_2 = 10^{-9} \text{ m}^2/\text{W}$, kecuali dapat disebutkan lain.

4.1 Contoh 1

Di sini dipakai empat model perata-rataan. Pada Gambar 1 simbol \square menyatakan $\psi_y^4(y)$ dirata-rata dengan $\psi_y^4(y^*)$, dimana y^* adalah nilai yang membuat $\psi_y^4(y)$ bernilai maksimum. Simbol $+$ menyatakan perata-rataan dengan $\psi_y^4(d/2)$, simbol \diamond menyatakan perata-rataan dengan $\frac{1}{d}\int_0^d \psi_y^4(y)dy$, sedangkan simbol \bullet menyatakan perata-rataan dengan $\psi_y^4(d/4)$.

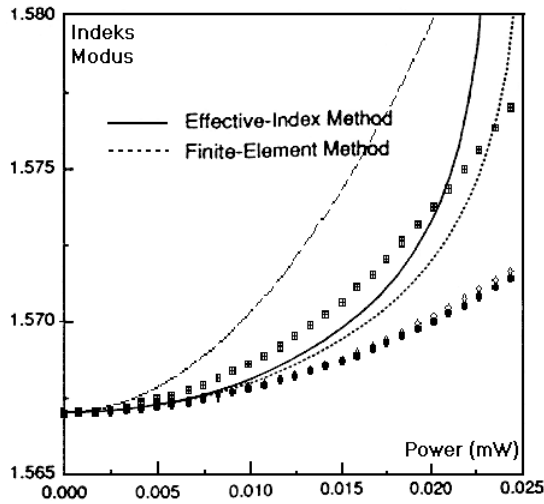


Gambar 1. Kurva dispersi untuk $\lambda = 0,515 \mu\text{m}$ dan $d = 2 \mu\text{m}$ (simbol dari atas ke bawah: \square , $+$, \diamond , \bullet)

Pada Gambar 1 kurva dengan garis tidak terputus didapat dari metode indeks efektif, sedangkan kurva dengan garis titik-titik didapat dari metode elemen hingga (sebagai acuan dalam perbandingan). Kedua kurva ini didapat dari contoh dalam¹⁾.

Kurva dispersi model $\psi_y^4(y^*)$ dan $\psi_y^4(d/2)$ adalah sama, karena pandu gelombangnya simetrik. Kedua model ini lebih baik dibanding kedua model lainnya. Namun keempat model perata-rataan tersebut belum dapat mengkarakterisasi adanya daya kritis $P_c = 1,86\pi/(k^2n_2n_f) = 0,025\text{mW}^1$. Walau demikian hasil yang diperoleh dapat dikatakan cukup baik, karena persentase kesalahan relatifnya cukup kecil ($< 10\%$), kecuali ketika daya mendekati daya kritis.

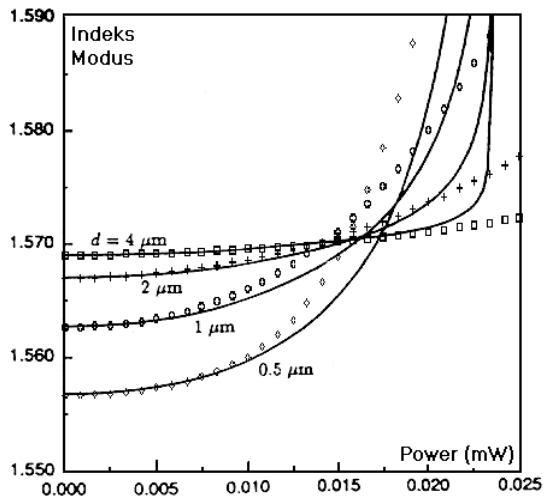
Gambar 2 berikut memuat Gambar 1 di atas ditambah kurva dengan garis putus-putus, dimana kurva ini didapat dari penTayloran relasi dispersi di sekitar $P = 0$ mW, yaitu $B(P) = 1,567 + 31,714 P^2$.



Gambar 2. Kurva dispersi untuk $\lambda = 0,515 \mu\text{m}$ dan $d = 2 \mu\text{m}$ dan pendekatan Taylornya di sekitar $P = 0\text{mW}$

4.2. Contoh 2

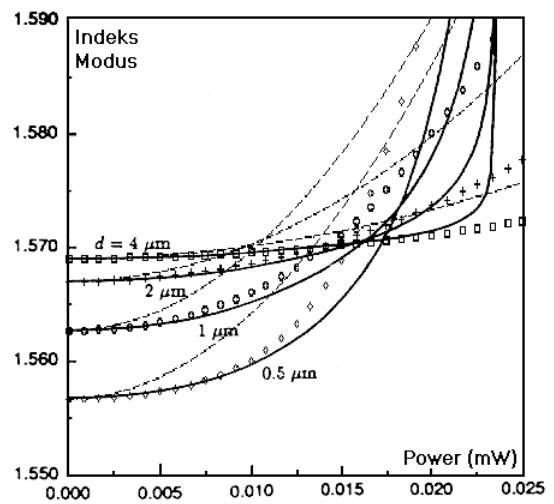
Dalam contoh ini ketebalan film dibuat bervariasi sebagai berikut $0,5 \mu\text{m}$, $1 \mu\text{m}$, $2 \mu\text{m}$, $4 \mu\text{m}$; dan perata-rataan yang digunakan adalah $\psi_y^4(y^*)$.



Gambar 3. Kurva dispersi untuk $\lambda = 0,515 \mu\text{m}$, $d = 0,5 \mu\text{m}$ (\diamond), $d = 1 \mu\text{m}$ (o), $d = 2 \mu\text{m}$ (+), $d = 4 \mu\text{m}$ (\square)

Pada Gambar 3 kurva dispersi dengan garis tidak terputus didapat dari metode indeks bias efektif. Kurva ini didapat dari contoh dalam¹⁾ dan dipakai sebagai acuan dalam perbandingan.

Pada $d = 2 \mu\text{m}$ dan $d = 4 \mu\text{m}$, kurva yang dihasilkan dari relasi dispersi dapat dikatakan baik, terutama untuk daya $0 - 0,02 \text{ mW}$. Demikian pula pada $d = 0,5 \mu\text{m}$ dan $d = 1 \mu\text{m}$, kurva yang didapat cukup baik untuk daya $0 - 0,0075 \text{ mW}$. Namun model perata-rataan yang digunakan belum dapat mengkarakterisasi adanya daya kritis $P_c = 0,025 \text{ mW}$.

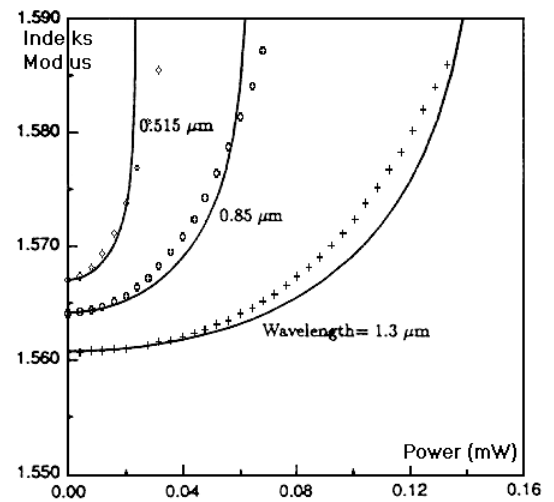


Gambar 4. Kurva dispersi untuk $\lambda = 0,515 \mu\text{m}$, $d = 0,5 \mu\text{m}$ (\diamond), $d = 1 \mu\text{m}$ (o), $d = 2 \mu\text{m}$ (+), $d = 4 \mu\text{m}$ (\square) dan pendekatan Taylornya di sekitar $P = 0 \text{ mW}$

Dalam Gambar 4 kurva dengan garis putus-putus didapat dari relasi dispersi yang ditaylorkan di sekitar $P = 0 \text{ mW}$, yaitu $B(P) = 1,557 + 73,084 P^2$ untuk $d = 0,5 \mu\text{m}$; $B(P) = 1,563 + 68,592 P^2$ untuk $d = 1 \mu\text{m}$; $B(P) = 1,567 + 31,714 P^2$ untuk $d = 2 \mu\text{m}$; $B(P) = 1,569 + 10,701 P^2$ untuk $d = 4 \mu\text{m}$.

4.3. Contoh 3

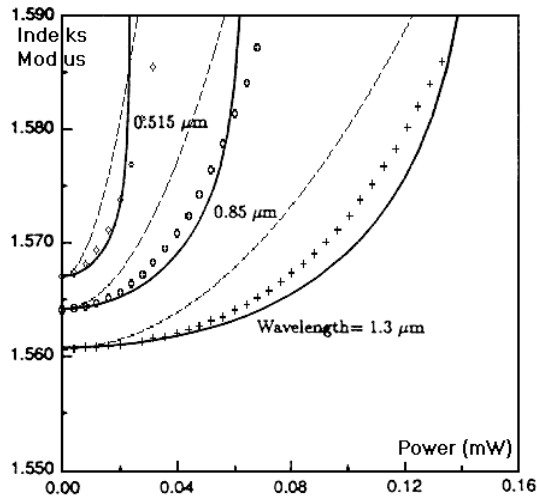
Pada contoh ini panjang gelombang dibuat bervariasi sebagai berikut $0,515 \mu\text{m}$, $0,85 \mu\text{m}$, dan $1,3 \mu\text{m}$, dan perata-rataan yang digunakan adalah $\psi_y^4(y^*)$.



Gambar 5. Kurva dispersi untuk $d = 2 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,515 \mu\text{m}$ (\diamond), $\lambda = 0,85 \mu\text{m}$ (o), $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$ (+)

Pada Gambar 5 kurva dengan garis tidak terputus didapat dari metode indeks bias efektif¹⁾ dan dipakai sebagai acuan dalam perbandingan.

Untuk $\lambda = 0,515 \mu\text{m}$ dan $\lambda = 0,85 \mu\text{m}$, kurva yang didapat dari relasi dispersi cukup baik, terutama untuk daya 0 - 0,02 mW. Namun relasi dispersi masih belum dapat mengkarakterisasi adanya daya kritis $P_c = 0,025 \text{ mW}$ untuk $\lambda = 0,515 \mu\text{m}$ dan $P_c = 0,068 \text{ mW}$ untuk $\lambda = 0,85 \mu\text{m}$, sedangkan untuk $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$ kurva yang dihasilkan cukup baik, terutama untuk daya 0 - 0,04 mW, namun belum dapat mengkarakterisasi adanya daya kritis $P_c = 0,159 \text{ mW}$.



Gambar 6. Kurva dispersi untuk $d = 2 \mu\text{m}$, $\lambda = 0,515 \mu\text{m}$ (\diamond), $\lambda = 0,85 \mu\text{m}$ (\circ), $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$ ($+$) dan pendekatan Taylornya di sekitar $P = 0 \text{ mW}$

Dalam Gambar 6 garis putus-putus merupakan kurva dispersi dari relasi dispersi yang diTaylorkan di sekitar $P = 0 \text{ mW}$, yaitu $B(P) = 1,567 + 31,714 P^2$ untuk $\lambda = 0,515 \mu\text{m}$; $B(P) = 1,564 + 7,833 P^2$ untuk $\lambda = 0,85 \mu\text{m}$; $B(P) = 1,561 + 1,924 P^2$ untuk $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$.

5. Kesimpulan

Dengan metode indeks bias efektif dan perata-rataan didapat relasi dispersi dalam bentuk implisit secara analitis untuk pandu gelombang planar nonlinear dengan nonlinearitas jenis Kerr. Dengan menggunakan relasi dispersi ini, perhitungan numerik yang dilakukan untuk mendapatkan kurva dispersi lebih sederhana. Dalam makalah ini telah dipakai relasi dispersi tersebut dengan beberapa model perata-rataan untuk mendapatkan kurva dispersi pandu gelombang planar simetrik yang di dalam corenya terdapat nonlinearitas jenis Kerr. Kurva dispersi yang dihasilkan dengan menggunakan relasi tersebut cukup baik, terutama untuk daya optis yang kecil. Model perata-rataan yang digunakan masih perlu diperbaiki lebih lanjut untuk mengkarakterisasi adanya daya optis kritis.

Referensi

1. K.S. Chiang, R.A. Sammut, 'Effective-Index Method for Spatial Solitons in Planar Waveguides with Kerr-Type Nonlinearity', J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 10, No. 4, pp. 704-708, April 1993.
2. K.S. Chiang, Analysis of Optical Fibers by the Effective-Index Method, Appl. Opt. **25**, 348-354, February 1986.