

## Model Estimasi Kondisi Kering Berdasarkan Data Hujan Lima Harian

R. Kartika Lestari dan Bayong Tjasyono HK  
Program Studi Meteorologi, GM - FIKTM – ITB  
Jl. Ganesa 10 Bandung 40132

### Abstrak

Kondisi cuaca sekarang tergantung kondisi cuaca sebelumnya. Dalam makalah ini akan dibahas model estimasi probabilitas kondisi kering dengan menerapkan model probabilitas rantai markov orde dua.

Hasilnya berupa persamaan matematik dan grafik dari empat kondisi probabilitas pentad (5 hari) kering dengan mengetahui kondisi dua pentad sebelumnya. Dua pentad sebelumnya dapat berupa keduanya kering (KKK), keduanya basah (BBK), atau kering dan basah (BKK dan KBK).

Pada umumnya, pola grafik probabilitas kering berdasarkan pengolahan data di beberapa stasiun pengamatan memberikan hasil yang serupa, walaupun koefisien dari persamaan probabilitas menunjukkan perbedaan. Nilai probabilitas KKK cenderung lebih besar daripada nilai tiga probabilitas yang lain dan probabilitas maksimum untuk KKK secara umum terjadi antara pentad ke-40 dan pentad ke-60 (sekitar pertengahan bulan Juli hingga akhir bulan Oktober).

**Kata kunci :** pentad, markov, probabilitas, kering, basah

### Abstract

Present weather condition depends on the previous weather conditions. In this paper, we discuss the probability of dry condition using a second order Markov chain probability model.

The results are the mathematical equations and graphics of four conditions of the probability of dry pentad (5-day) by knowing two previous pentads.

All of the graphics have same models, but the equations are different in coefficients. The result is that probability of KKK is greater than the probability of dry pentad knowing previous two pentads are not whole dry. The maximum probability of dry pentad (KKK) occurs from 40<sup>th</sup> pentad up to 60<sup>th</sup> pentad or in the middle of July up to the end of October.

**Keywords :** pentad, markov, probability, dry, wet the two previous pentads can be both dry (KKK), both wet (BBK), or dry and wet (KBK and BKK)

## 1. Pendahuluan

Indonesia merupakan daerah monsoon dengan sel tekanan tinggi dan rendah saling bergantian di atas benua Asia dan Australia, sehingga kondisi kekeringannya mempunyai periode musiman. Kondisi cuaca kering dapat diestimasi dengan distribusi panjang urutan kondisi kering dan basah. Kajian urutan kering dan basah dari sejumlah stasiun memberikan kesimpulan bahwa probabilitas suatu hari kering meningkat sedikit dengan panjangnya periode kering<sup>1)</sup> dan memakai model probabilitas rantai markov orde satu untuk menggambarkan ketergantungan statistik yang biasanya terdapat dalam rangkaian presipitasi harian dari sebuah stasiun tertentu.

Dalam tulisan ini, akan dipaparkan model probabilitas rantai markov orde dua, yang diterapkan pada data curah hujan pentad (data hujan lima harian), untuk mengestimasi kondisi pentad kering dengan mengetahui dua kondisi pentad sebelumnya. Ada empat kemungkinan keadaan yang akan ditinjau, yaitu KKK (probabilitas kondisi kering dengan mengetahui dua kondisi kering sebelumnya), BKK (probabilitas kondisi kering dengan mengetahui kondisi kering dan kondisi basah sebelumnya), KBK (probabilitas kondisi kering dengan mengetahui kondisi basah dan kondisi kering sebelumnya) dan BBK (probabilitas kondisi kering dengan mengetahui dua kondisi basah sebelumnya)<sup>2)</sup>.

## 2. Hukum perkalian probabilitas dan rantai Markov

Pandang urutan 73 pentad dalam satu tahun, dengan data pentad pertama merupakan data kumulatif selama lima hari, mulai tanggal 1 sampai dengan 5 Januari dan data pentad ke-73 adalah data kumulatif selama lima hari, mulai pada tanggal 27 Desember sampai dengan tanggal 31 Desember, sedangkan untuk tahun kabisat, data pentad ke-73 merupakan data kumulatif selama enam hari mulai tanggal 26 Desember sampai dengan 31 Desember. Untuk suatu variabel waktu  $t$ , ambil  $x_{t+i}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n < 73$ ), dengan  $x_{t+i} = x_{t+i-365}$  jika  $t+i > 73$ , merupakan  $(n+1)$  variabel acak. Di sini nilai untuk setiap  $x$  dibatas oleh dua macam nilai, yaitu  $x = K$  (pentad kering) dan  $x = B$  (pentad basah).

Ambil  $P(x_1, x_2, \dots, x_{t+n})$  merupakan probabilitas terjadinya urutan kejadian di dalam tanda kurung. Untuk  $t$  dan  $n$  yang diberikan, diasumsikan bahwa probabilitas adalah konstan dalam tahun-tahun yang ditinjau. Pandang hukum perkalian dalam teori probabilitas:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_{t+n}) = P(x_t) \cdot P(x_{t+1}|x_t) \cdot P(x_{t+2}|x_{t+1}, x_t) \dots$$

$$P(x_{t+n}|x_{t+n-1}, \dots, x_t) \quad (1)$$

Ruas kanan persamaan (1) merupakan perkalian probabilitas awal  $P(x_t)$  dengan probabilitas-probabilitas bersyarat.

Jika observasi antara pentad yang satu dengan yang lain adalah saling bebas statistik, maka persamaan (1) dapat disederhanakan menjadi:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_{t+n}) = P(x_t) \cdot P(x_{t+1}) \dots P(x_{t+n}) \quad (2)$$

Akan tetapi, asumsi seperti di atas kurang dapat diterima, terutama di daerah dengan curah hujan yang cukup tinggi.

Diasumsikan bahwa probabilitas bersyarat yang muncul dalam persamaan (1) hanya tergantung kondisi cuaca hari sebelumnya, yang kemudian disebut sebagai rantai Markov orde satu<sup>1)</sup>. Dalam tulisan ini, model rantai Markov orde satu dianggap kurang memadai dan dikembangkan menjadi model rantai Markov orde dua, yang mengasumsikan bahwa kondisi cuaca saat ini tergantung pada kondisi cuaca dua pentad sebelumnya, sehingga persamaan (1) dapat ditulis menjadi:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_{t+n}) = P(x_t) \cdot P(x_{t+1}|x_t) \cdot P(x_{t+2}|x_{t+1}, x_t) \dots P(x_{t+n}|x_{t+n-1}, x_{t+n-2}) \quad (3)$$

### 3. Estimasi probabilitas awal dan probabilitas bersyarat

Dalam makalah ini, model rantai Markov diterapkan pada data curah hujan pentad selama dua puluh tahun di beberapa stasiun di Indonesia. Batasan curah hujan yang diambil untuk mendefinisikan keadaan "kering" (yang disimbolkan dengan "0") dan "basah" (yang disimbolkan dengan "1") adalah 25 mm<sup>3)</sup>. Sebagai contoh, frekuensi relatif berikut dapat digunakan untuk mengestimasi  $P(K_t)$ ,  $P(K_t/K_{t-1})$  dan  $P(K_t/K_{t-1}, K_{t-2})$ , yaitu:

$$p(K_t) = \frac{\text{jumlah tahun dengan pentad ke - (t) kering}}{\text{jumlah tahun yang ditinjau}} \quad (4)$$

$$p(K_t/K_{t-1}) = \frac{\text{jumlah tahun dengan pentad ke - (t) dan pentad ke - (t-1) kering}}{\text{jumlah tahun dengan pentad ke (t-1) kering}} \quad (5)$$

$$p(K_t/K_{t-1}, K_{t-2}) = \frac{\text{jumlah tahun dengan pentad ke - (t), ke - (t-1) dan ke - (t-2) kering}}{\text{jumlah tahun dengan pentad ke (t-1) dan pentad ke (t-2) kering}} \quad (6)$$

dengan  $p$  mengganti  $P$  untuk menyatakan frekuensi-frekuensi relatif yang merupakan estimasi dari probabilitas-probabilitas yang tak diketahui. Probabilitas bersyarat yang lain dapat diestimasi dengan menggunakan cara yang sama.

Selanjutnya, fungsi distribusi kemungkinannya dapat dicari dengan menggunakan nilai-nilai kemungkinan relatif di atas pada berbagai nilai  $t$  dan dengan menggunakan metode Least Square untuk menentukan konstanta-konstanta dalam persamaan<sup>4)</sup>:

$$\text{Pr ob} = A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \cos \frac{2\pi ti}{73} + \sum_{i=1}^m B_i \sin \frac{2\pi ti}{73} \quad t = 1, 2, \dots, 73 \quad (7)$$

Dengan  $m$  menyatakan harmonik ke- $m$  dari deret Fourier dan di sini  $m$  diambil sama dengan satu, karena

pengambilan nilai  $m$  yang lebih tinggi akan memberikan pola grafik probabilitas yang serupa<sup>1)</sup>.

Dari 73 kemungkinan relatif, ditentukan fungsi untuk nilai-nilai probabilitas di atas dengan metode Least Square dan akan diperoleh persamaan normal:

$$\sum_{i=1}^{73} (\text{Pr ob})x_0 = A_0 \sum_{i=1}^m x_0^2 + A_1 \sum_{i=1}^m x_0 x_1 + B_1 \sum_{i=1}^m x_0 x_2 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{73} (\text{Pr ob})x_1 = A_0 \sum_{i=1}^m x_0 x_1 + A_1 \sum_{i=1}^m x_1^2 + B_1 \sum_{i=1}^m x_1 x_2 \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{73} (\text{Pr ob})x_2 = A_0 \sum_{i=1}^m x_0 x_2 + A_1 \sum_{i=1}^m x_1 x_2 + B_1 \sum_{i=1}^m x_2^2 \quad (10)$$

dengan,  $\text{Pr ob}$  adalah nilai kemungkinan relatif atau bersyarat yang akan ditinjau

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = \cos \frac{2\pi t}{73}$$

$$x_2 = \sin \frac{2\pi t}{73}$$

$A_0$ ,  $A_1$  dan  $B_1$  adalah konstanta-konstanta yang akan dicari.

### 4. Hasil dan Pembahasan

Simulasi dilakukan atas beberapa stasiun untuk melihat probabilitas pentad kering dengan diketahui keadaan dua pentad sebelumnya<sup>2)</sup>. Dan hasil simulasi untuk tiga stasiun yang berbeda di Indonesia yang berupa persamaan matematika, tabel dan grafik probabilitas adalah sebagai berikut:

#### 4.1. Stasiun Palembang

Persamaan matematika probabilitas curah hujan pentad :

$$P(KKK) = 0,78 - 0,09 \cos (2\pi t/73) - 0,32 \sin (2\pi t/73)$$

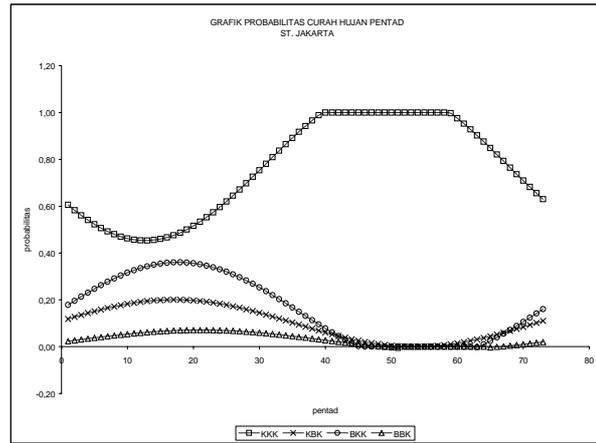
$$P(KBK) = 0,11 - 0,05 \cos (2\pi t/73) + 0,12 \sin (2\pi t/73)$$

$$P(BKK) = 0,11 - 0,09 \cos (2\pi t/73) + 0,16 \sin (2\pi t/73)$$

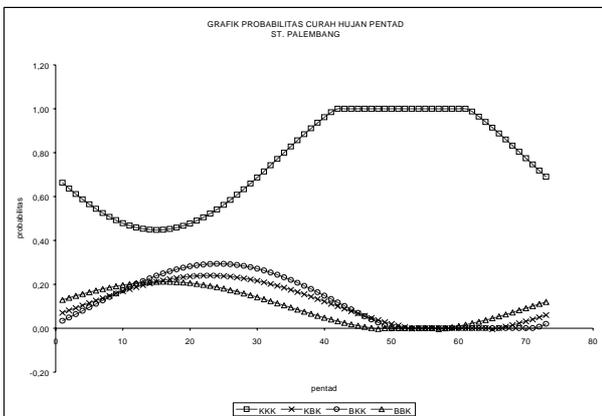
$$P(BBK) = 0,1 + 0,02 \cos (2\pi t/73) + 0,11 \sin (2\pi t/73) \quad (11)$$

Tabel 1. Probabilitas curah hujan pentad

Pentad	KKK	KBK	BKK	BBK
1	0.66	0.07	0.03	0.13
8	0.51	0.15	0.14	0.19
15	0.45	0.21	0.24	0.21
22	0.51	0.24	0.29	0.20
29	0.66	0.22	0.28	0.15
36	0.86	0.17	0.21	0.08
43	1.00	0.09	0.10	0.02
50	1.00	0.02	0.00	0.00
57	1.00	0.00	0.00	0.00
64	0.94	0.00	0.00	0.04
71	0.75	0.04	0.00	0.10



Gambar 2. Grafik probabilitas curah hujan



Gambar 1. Grafik probabilitas curah hujan

### 4.3. Stasiun Kupang

Persamaan matematika probabilitas curah hujan pentad St. Kupang:

$$\begin{aligned}
 P(KKK) &= 0,79 - 0,14 \cos(2\pi t/73) - 0,28 \sin(2\pi t/73) \\
 P(KBK) &= 0,15 + 0,07 \cos(2\pi t/73) + 0,23 \sin(2\pi t/73) \\
 P(BKK) &= 0,14 - 0,01 \cos(2\pi t/73) + 0,2 \sin(2\pi t/73) \\
 P(BBK) &= 0,05 - 0,03 \cos(2\pi t/73) + 0,1 \sin(2\pi t/73)
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Tabel 3. Probabilitas curah hujan pentad

Pentad	KKK	KBK	BKK	BBK
1	0.63	0.24	0.15	0.03
8	0.50	0.35	0.26	0.09
15	0.48	0.39	0.33	0.14
22	0.57	0.35	0.33	0.15
29	0.73	0.23	0.27	0.13
36	0.92	0.09	0.16	0.08
43	1.00	0.00	0.04	0.02
50	1.00	0.00	0.00	0.00
57	1.00	0.00	0.00	0.00
64	0.89	0.04	0.00	0.00
71	0.70	0.18	0.10	0.00

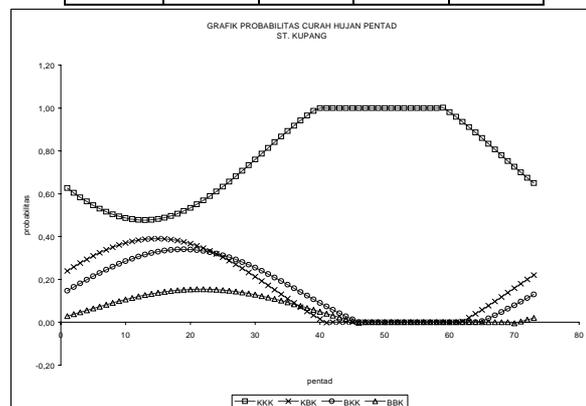
### 4.2 Stasiun Jakarta

Persamaan matematika probabilitas curah hujan pentad :

$$\begin{aligned}
 P(KKK) &= 0,78 - 0,15 \cos(2\pi t/73) - 0,29 \sin(2\pi t/73) \\
 P(KBK) &= 0,1 + 0,01 \cos(2\pi t/73) + 0,1 \sin(2\pi t/73) \\
 P(BKK) &= 0,15 + 0,01 \cos(2\pi t/73) + 0,21 \sin(2\pi t/73) \\
 P(BBK) &= 0,03 - 0,01 \cos(2\pi t/73) + 0,04 \sin(2\pi t/73)
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Tabel 2. Probabilitas curah hujan pentad

Pentad	KKK	KBK	BKK	BBK
1	0.61	0.12	0.18	0.02
8	0.48	0.17	0.29	0.05
15	0.46	0.20	0.35	0.07
22	0.55	0.19	0.35	0.07
29	0.73	0.15	0.27	0.06
36	0.92	0.09	0.15	0.04
43	1.00	0.04	0.03	0.02
50	1.00	0.00	0.00	0.00
57	1.00	0.00	0.00	0.00
64	0.88	0.04	0.01	0.00
71	0.68	0.09	0.12	0.01



Gambar 3. Grafik probabilitas curah hujan

Hasil simulasi menunjukkan bahwa persamaan matematik dalam bentuk deret Fourier untuk probabilitas pentad kering memberikan perbedaan nilai koefisien dari suku persamaan untuk stasiun yang berbeda, dan perbedaan itu dapat dilihat dengan lebih jelas dalam bentuk tabel dari nilai probabilitas. Akan tetapi, grafik probabilitas secara umum memberikan pola yang serupa.

Dari tabel dan grafik probabilitas hasil simulasi, diperoleh nilai yang kadang-kadang melebihi satu atau kurang daripada nol, hal ini disebabkan pemilihan nilai  $m = 1$  (harmonik pertama). Akan tetapi, karena dalam hal ini yang ditinjau adalah pada pola probabilitas, bukan nilai probabilitas secara kuantitatif dan pengambilan nilai harmonik yang lebih tinggi tidak akan mengubah pola grafik probabilitas yang diperoleh, maka nilai-nilai probabilitas yang melebihi satu diisi dengan nilai satu dan yang kurang daripada nol diisi dengan nilai nol.

Dari tabel dan grafik, secara umum probabilitas untuk KKK lebih tinggi daripada ketiga probabilitas yang lain dan probabilitas untuk BBK adalah paling rendah jika dibandingkan dengan KKK, KBK dan BKK. Hal ini menunjukkan bahwa peluang untuk terjadinya pentad kering akan lebih tinggi jika sebelumnya didahului oleh pentad kering dan khusus untuk grafik probabilitas KKK, secara umum diperoleh bahwa nilai maksimum adalah sekitar pentad ke-45 sampai dengan pentad ke-65 (sekitar pertengahan Agustus hingga pertengahan November) dan pada pentad tersebut terjadi kondisi minimum untuk grafik probabilitas KBK, BKK dan BBK.

### 5. Kesimpulan

1. Pola kejadian kondisi kering dalam pentad dapat digambarkan dengan model probabilitas rantai markov orde dua

2. Setiap stasiun pengamatan mungkin akan memiliki persamaan probabilitas yang berbeda-beda, tetapi pola grafik yang diperoleh dari persamaan tersebut akan serupa.
3. Pengambilan nilai harmonik yang lebih tinggi akan meningkatkan akurasi perhitungan, akan tetapi akan menghasilkan pola grafik probabilitas yang serupa.
4. Probabilitas pentad kering akan lebih tinggi jika sebelumnya didahului oleh pentad kering.

### Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Proyek RUT VIII.1 - KMRT atas dukungan finansial via kontrak No. 011.11/SK/RUT/2001.

### Daftar Pustaka

1. Fayerharm, A.M. dan L.D. Bark, *Statistical Methods for Persistent Precipitation Patterns*, J. Appl. Meteorology, **4**, 1965.
2. Bayong, Tj.H.K. dan R. Kartika Lestari, *Estimasi Kondisi Kering dengan Model Rantai Markov*, Disampaikan pada Temu Ilmiah Prediksi Cuaca dan Iklim Nasional II, LAPAN - Bandung, 21 Agustus 2001.
3. Bayong, Tj. H.K., The H.L., P.A. Winarso, R. Kartika L., Zadrach L.D. dan Plato M.A., *Mekanisme Bencana Alam Kekeringan di Benua Maritim Indonesia*. Laporan Kemajuan Tahap I, RUT VIII.1, KMRT - LIPI, Jakarta, 2001
4. Stern, R.D., *Computing a probability distribution for the start of the rains from a Markov Chain for precipitation*, J. Appl. Meteo., **21**, 1981.