Kontribusi Fisika Indonesia
Vol. 12 No.4, Oktober 2001

Identitas Nielsen

Triyanta[*)] dan Sutisna[**)]
**) Departemen Fisika, FMIPA-ITB, Jl. Ganesa 10 Bandung 40132*
[**)] FMIPA Universitas Jember
Jl. Kalimantan Kampus Bumi TegalbotoJember 68121
e-mail: triyanta@fi.itb.ac.id

Abstrak
Kebergantungan aksi efektif Γ terhadap parameter gauge yang telah diketahui sejak lama ditunjukkan oleh persamaan diferensial yang disebut identitas Nielsen. Identitas ini muncul di dalam teori medan kuantum sebagai akibat dari invariannya rapat fungsi Lagrange terhadap transformasi BRST yang diperluas. Di dalam makalah ini identitas tersebut, baik untuk kasus QED dan QCD, akan diturunkan pada beberapa kondisi gauge, yang pertama dengan mengikuti metode yang terdapat di dalam referensi dan yang kedua dengan sebuah metode usulan.

Kata kunci: *aksi efektif, transformasi BRST yang diperluas, pilihan gauge, parameter gauge, identitas Nielsen.*

Abstract
The gauge dependence of the effective action Γ that has been known for quite a long time is shown by a differential equation called the Nielsen identity. The identities appear in quantum field theory as due to the invariance of the Lagrange density with respect to the extended BRST transformations. In this paper the identities, both for the case of QED and QCD, will be derived in some gauge choices, first by following a method found in the references and second by a proposed method.

Keywords*: effective action, extended BRST transformation, gauge choice, gauge parameter, Nielsen identity*

1. Pendahuluan

Invariannya rapat fungsi Lagrange untuk sebuah sistem terhadap suatu transformasi menghasilkan suatu identitas. Sebagai contoh, di dalam kromodinamika kuantum (QCD)[1,2], dan ini dapat diperluas untuk kasus non-Abelian secara umum, invariannya

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \overline{\psi}(i\not{D} - m)\psi \qquad (1)$$

terhadap transformasi gauge lokal infinitesimal

$$\begin{aligned} \delta\psi(x) &= -igT^a \Lambda^a(x)\psi(x), \\ \delta\overline{\psi} &= ig\overline{\psi}(x)T^a\Lambda^a(x), \\ \delta A^a_\mu(x) &= -D^{ab}_\mu(x)\Lambda^b(x) \end{aligned} \qquad (2)$$

menghasilkan identitas Slavnov-Taylor (suku-suku yang yang berkaitan dengan medan fermion ψ tidak dituliskan)[3-5)]

$$\left[\frac{\delta}{i\delta K^a} + \int dy J^{b\mu}(y) D^{bc}_\mu\left(\frac{\delta}{i\delta J}\right) M^{-1ca}\left(y, x; \frac{\delta}{i\delta J}\right)\right] Z = 0. \qquad (3)$$

Di dalam ungkapan di atas

$$F^{a\mu\nu} = \partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + gf^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} \not{D} &= \gamma^\mu\left(\partial_\mu - igT^a A^a_\mu\right), \\ D^{ab}_\mu &= \delta^{ab}\partial_\mu - gf^{abc}A^c_\mu \end{aligned} \qquad (5)$$

dengan $A^\mu = T^a A^{a\mu}$ adalah medan gauge dengan sumber eksternal J^μ, ψ dan $\overline{\psi}$ adalah medan-medan materi, γ^μ matriks Dirac, T^a generator grup transformasi SU(3) dengan f^{abc} sebagai konstanta strukturnya, g konstanta kopling, Λ parameter transformasi, dan Z fungsional pembangkitan. K^a adalah sumber eksternal bagi medan pengali Lagrange C^a yang muncul di dalam suku kondisi gauge dari rapat Lagrangian lengkap. Suku tersebut berbentuk

$$\mathcal{L}_{gf} = C^a G_\mu A^{a\mu} + \frac{1}{2\lambda} C^2 \qquad (6)$$

(λ adalah parameter gauge). Untuk kondisi Lorentz, aksial, dan Fock-Schwinger G^μ berturut-turut sama dengan ∂^μ, n^μ, dan x^μ. Akibat kebergantungan M^{ab} terhadap medan gauge melalui definisi[5)] ($A^{\theta a}_\mu$ adalah medan A^a_μ yang telah mengalami transformasi gauge dengan θ sebagai parameter transformasi.)

$$\begin{aligned}\left[iM_G(x,y)\right]^{ab} &= \frac{\delta\left[G^{\mu}A_{\mu}^{\theta a}(x)\right]}{\delta\theta^{b}(y)}\\ &= \left(f^{abc}A_{\mu}^{c}G^{\mu} - \frac{1}{g}\delta^{ab}G^{\mu}\partial_{\mu}\right)\delta(x-y)\end{aligned} \tag{7}$$

identitas (3) tidak dapat ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana, tetapi untuk kondisi gauge yang bebas hantu, seperti kondisi aksial dan kondisi Fock-Schwinger[5,6], kuantitas M^{ab} tidak bergantung pada medan gauge sehingga identitas (3) dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih sederhana. Untuk kondisi Fock-Schwinger misalnya, identitas (3) berbentuk (setelah memasukkan suku-suku fermion)

$$\begin{aligned}& i\delta^{ab}\partial^{\mu}\left[x_{\mu}C^{a} - \frac{\delta\Gamma}{\delta A^{a\mu}}\right] + igf^{abc}x_{\mu}A^{c\mu}C^{a}\\ & - igf^{abc}A^{c\mu}\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{a\mu}} + gT^{b}\overline{\psi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}} - gT^{b}\psi\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Bentuk identitas (3) yang rumit untuk sembarang gauge ternyata dapat disederhanakan apabila kita berpindah dari simetri gauge ke simetri BRST (Becchi, Rouet, Stora, dan Tyutin)[7,8]. Simetri BRST berkaitan dengan transformasi BRST yang berupa transformasi gauge (2) plus

$$\begin{aligned}&\delta\chi^{a}(x) = -\frac{1}{2}g\theta f^{abc}\chi^{b}(x)\chi^{c}(x),\\ &\delta\chi^{*a}(x) = \theta C^{a}(x),\\ &\delta C^{a}(x) = 0,\\ &\Lambda^{a}(x) = -\theta\chi^{a}(x)\end{aligned} \tag{9}$$

(θ adalah kuantitas grassmann). Atas dasar simetri BRST tersebut diperoleh identitas BRST[5]

$$\begin{aligned}&\int dx\left[\frac{\delta\Gamma}{\delta u^{a\mu}}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta A_{\mu}^{a}} \pm G^{\mu}C^{a}\right)\right.\\ &\left. + \frac{\delta\Gamma}{\delta\chi^{a}}\frac{\delta\Gamma}{\delta v^{a}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varpi} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}}\right] = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

Pada suku kedua tanda + berlaku untuk kondisi Lorentz sedangkan tanda - untuk kondisi gauge dengan G^{μ} tidak mengandung operator derivatif, seperti kondisi aksial, "lightcone", dan Fock-Schwinger. Sumber-sumber anti komut $u^{a\mu}$ dan sumber-sumber komut v^{a}, ω, dan ϖ didefinisikan melalui aksi

$$S = \int dx\left[\begin{aligned}& L_0 + L_{gf} + A_{\mu}^{a}J^{a\mu} + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta + \xi^{*a}\chi^{a}\\ & + \chi^{*a}\xi^{a} + C^{a}K^{a} + u^{a\mu}D_{\mu}^{ab}\chi^{b} - \frac{g}{2}v^{a}f^{abc}\chi^{b}\chi^{c}\\ & + ig\chi^{a}\varpi T^{a}\psi - ig\overline{\psi}\chi^{a}T^{a}\omega\end{aligned}\right]. \tag{10}$$

Di dalam elektrodinamika kuantum (QED) indeks-indeks internal $a=b=c=1$ dan konstanta kopling $g=e$. Identitas yang bersesuaian dengan ini adalah identitas Ward-Takahashi yang berbentuk

$$\pm i\partial^{\mu}x_{\mu}C + i\partial^{\mu}\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{a\mu}} - e\overline{\psi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}} + e\psi\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} = 0. \tag{11}$$

Untuk melihat kebergantungan aksi efektif Γ terhadap parameter gauge λ kita modifikasi rapat Lagrangian untuk QED dan QCD dengan memberikan satu suku tambahan yang tidak mengubah dinamika sistem[9]:

$$\mathcal{L}_{QED/QCD} \to \mathcal{L}_{QED/QCD} + \frac{\gamma}{2}\chi^{*}C \tag{12}$$

dengan γ adalah variabel Grassmann, $\gamma^2=0$. Faktor γ ini yang menyebabkan tidak terjadinya perubahan fisis: Ekspansi fungsional pembangkitan dalam γ hanya menyisakan dua suku, suku γ pangkat nol dan pangkat satu. Yang pertama memberikan dinamika QED/QCD sedangkan yang kedua lenyap ketika integrasi terhadap medan-medan hantu dilakukan. Dengan menggunakan rapat Lagrangian yang dimodifikasi menurut (12) dan melakukan transformasi BRST yang diperluas, yaitu transformasi (2+9) plus transformasi

$$\delta\lambda=\theta\gamma, \qquad \delta\gamma=0 \tag{13}$$

maka kita akan dapatkan identitas Nielsen[10]. Berbagai referensi telah meninjau identitas Nielsen untuk fungsi-fungsi dua titik[9], untuk berbagai kuantitas di dalam model Higgs di bawah kerangka kondisi gauge t"Hooft[11-16] dan gauge planar[12] serta untuk teori-teori yang dapat direnormalisasi yang dikuantisasi di dalam kondisi Lorentz[17]. Identitas Nielsen (di dalam kondisi Lorentz) untuk bentuk identitas yang analog dengan identitas BRST (10), telah diturunkan pada referensi[9]. Di sini akan diturunkan identitas itu, baik untuk QED maupun QCD, pada sembarang G^{μ}. Selain itu kita juga akan ajukan cara penurunan yang berbeda dengan cara yang terdapat di dalam referensi.

2. Identitas Nielsen untuk QED

Fungsional pembangkit untuk QED adalah

$$Z[J,\overline{\eta},\eta,K,\lambda,\varpi,\omega]$$
$$=\int D[A\overline{\psi}\psi C\chi^{*}\chi]\exp\left\{i\int dx\begin{bmatrix}\mathrm{L}+A_{\mu}J^{\mu}+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta\\+CK+ie\chi\psi\varpi-ie\overline{\psi}\chi\omega\end{bmatrix}\right\} \quad (14)$$

dengan

$$\begin{aligned}\mathrm{L}=&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\overline{\psi}(iD\!\!\!/-m)\psi\\&+\frac{\lambda}{2}C^{2}+CG_{\mu}A^{\mu}-\chi^{*}G_{\mu}\partial^{\mu}\chi+\frac{\gamma}{2}\chi^{*}C\end{aligned} \quad .(15)$$

Di sini $D[A\overline{\psi}\psi C\chi^{*}\chi]$ adalah integral measure yang bersifat invarian terhadap transformasi BRST (infinitesimal) yang diperluas[9]:

$$\begin{aligned}&\delta A^{\mu}=\theta\partial^{\mu}\chi,\quad \delta\psi=ie\theta\chi\psi,\quad \delta\overline{\psi}=-ie\overline{\psi}\theta\chi,\quad \delta\chi=0,\\&\delta\chi^{*}=\theta C,\quad \delta C=0,\quad \delta\lambda=\theta\gamma,\quad \delta\gamma=0.\end{aligned} \quad (16)$$

Invariannya integral measure tersebut dapat dipahami karena determinan Jacobian dari transformasi di atas hanya berasal dari bagian diagonalnya saja sedangkan elemen-elemen diagonalnya jelas sama dengan satu. Mengingat transformasi di atas memperlakukan parameter gauge sebagai sebuah medan maka aksi efektif bergantung pada "medan" parameter gauge (W=-$i$ln$Z$)[1,2]:

$$\begin{aligned}&\Gamma[A,\overline{\psi},\psi,C,\chi,^{*}\chi,\varpi,\omega,\lambda]\\&=W[J,\overline{\eta},\eta,K,\lambda,\varpi,\omega]\\&-\int dx\left[A_{\mu}J^{\mu}+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta+CK\right]\end{aligned} \quad (17)$$

Aksi efektif bersifat invarian terhadap transformasi (16), oleh karena itu kita dapat tuliskan

$$\delta\Gamma=\int dx\begin{bmatrix}\delta A^{\mu}\dfrac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu}}+\delta\psi\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\psi}+\delta\overline{\psi}\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}}\\+\delta\chi\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\chi}+\delta\chi^{*}\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\chi^{*}}+\delta\lambda\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\lambda}\end{bmatrix}=0 \quad (18)$$

atau

$$\int dx\begin{bmatrix}\partial^{\mu}\chi\dfrac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu}}+ie\chi\psi\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\psi}-ie\chi\overline{\psi}\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}}\\+C\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\chi^{*}}+\gamma\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\lambda}\end{bmatrix}=0 \quad (19)$$

yang dapat dituliskan menjadi

$$\int dx\begin{bmatrix}\partial^{\mu}\chi\dfrac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu}}+\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\varpi}\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\psi}+\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\omega}\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}}\\+C\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\chi^{*}}+\gamma\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\lambda}\end{bmatrix}=0 \quad (20)$$

setelah memanfaatkan hubungan-hubungan

$$\begin{aligned}&\frac{\delta Z}{i\delta\varpi}=+ie\chi\psi Z,\quad \frac{\delta W}{\delta\varpi}=\frac{1}{iZ}\frac{\delta Z}{\delta\varpi},\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\varpi}=\frac{\delta W}{\delta\varpi},\\&\frac{\delta Z}{i\delta\omega}=-ie\chi\overline{\psi}Z,\quad \frac{\delta W}{\delta\omega}=\frac{1}{iZ}\frac{\delta Z}{\delta\omega},\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega}=\frac{\delta W}{\delta\omega}\end{aligned} \quad (21)$$

yang merupakan akibat dari persamaan (14) dan (17). Persamaan (20) adalah identitas Nielsen untuk QED. Secara sepintas identitas tersebut berbeda dengan identitas Ward-Takahashi, namun sebenarnya ekivalen.

3. Identitas Nielsen untuk QCD

Untuk QCD fungsional pembangkitan Z berbentuk

$$\begin{aligned}&Z[J,\overline{\eta},\eta,K,\lambda,\varpi,\omega,\xi^{*},\xi,u,v]\\&=\int D[A\overline{\psi}\psi C\chi^{*}\chi]\exp\Big\{i\int dx\Big[\mathrm{L}+A^{a}_{\mu}J^{a\mu}+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta+\\&\quad C^{a}K^{a}+\xi^{*a}\chi^{a}+\chi^{*a}\xi^{a}+ig\chi^{a}\varpi T^{a}\psi\\&\quad -ig\overline{\psi}\chi^{a}T^{a}\omega-gv^{a}f^{abc}\chi^{b}\chi^{c}+u^{a\mu}D^{ab}_{\mu}\chi^{b}\Big]\Big\}\end{aligned} \quad (22)$$

dengan

$$\begin{aligned}\mathrm{L}=&-\frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\overline{\psi}(iD\!\!\!/-m)\psi\\&+\frac{\lambda}{2}C^{2}+C^{a}G_{\mu}A^{a\mu}-\chi^{*a}M^{ab}\chi^{b}\\&+\frac{\gamma}{2}\chi^{*a}C^{a}\end{aligned} \quad (23)$$

Integral measure, L, dan empat suku terakhir dari persamaan (22) bersifat invarian terhadap transformasi BRST yang diperluas[9]:

$$\begin{aligned}&\delta A^{a\mu}=\theta D^{ab\mu}\chi^{b}, &&\delta\psi=ig\theta T^{a}\chi^{a}\psi,\\&\delta\overline{\psi}=-ig\overline{\psi}\theta T^{a}\chi^{a}, &&\delta\chi^{*a}=\theta C^{a},\\&\delta\chi^{a}=-\tfrac{1}{2}g\theta f^{abc}\chi^{b}\chi^{c}, &&\delta C^{a}=0,\\&\delta\lambda=\theta\gamma, &&\delta\gamma=0.\end{aligned} \quad (24)$$

Sifat yang sama dimiliki pula oleh aksi efektif

$$\begin{aligned}&\Gamma[A,\overline{\psi},\psi,C,\chi,^{*}\chi,\varpi,\omega,\lambda,u,v]\\&=W[J,\overline{\eta},\eta,K,\xi^{*},\xi,\lambda,\varpi,\omega,u,v]+\\&-\int dx\left[A^{a}_{\mu}J^{a\mu}+\chi^{*a}\xi^{a}+\xi^{*a}\chi^{a}+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta+CK\right]\end{aligned} \quad (25)$$

sehingga ungkapan (18) berlaku pula di sini (tentunya dengan penggantian $A^{\mu},\chi^{*},\chi\rightarrow A^{a\mu},\chi^{*a},\chi^{a}$). Ungkapan ini dapat dituliskan menjadi

$$\int dx\begin{bmatrix}D^{ab\mu}\chi^{b}\dfrac{\delta\Gamma}{\delta A^{a\mu}}+igT^{a}\chi^{a}\psi\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\psi}-igT^{a}\chi^{a}\overline{\psi}\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}}\\-\dfrac{g}{2}f^{abc}\chi^{b}\chi^{c}\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\chi^{a}}+C^{a}\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\chi^{*a}}+\gamma\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\lambda}\end{bmatrix}=0 \quad (26)$$

setelah transformasi (24) dipergunakan. Selanjutnya, persamaan (22) dan (25) memberikan

$$\frac{\delta Z}{i\delta u^{a\mu}} = D_\mu^{ab}\chi^b Z, \qquad \frac{\delta W}{\delta u^{a\mu}} = \frac{1}{iZ}\frac{\delta Z}{\delta u^{a\mu}}, \qquad \frac{\delta\Gamma}{\delta u^{a\mu}} = \frac{\delta W}{\delta u^{a\mu}},$$
$$\frac{\delta Z}{i\delta\varpi} = +ig\chi\psi Z, \qquad \frac{\delta W}{\delta\varpi} = \frac{1}{iZ}\frac{\delta Z}{\delta\varpi}, \qquad \frac{\delta\Gamma}{\delta\varpi} = \frac{\delta W}{\delta\varpi},$$
$$\frac{\delta Z}{i\delta\omega} = -ig\overline{\psi}\chi Z, \qquad \frac{\delta W}{\delta\omega} = \frac{1}{iZ}\frac{\delta Z}{\delta\omega}, \qquad \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega} = \frac{\delta W}{\delta\omega},$$
$$\frac{\delta Z}{i\delta v^a} = -\frac{g}{2} f^{abc}\chi^b\chi^c Z, \qquad \frac{\delta W}{\delta v^a} = \frac{1}{iZ}\frac{\delta Z}{\delta v^a}, \qquad \frac{\delta\Gamma}{\delta v^a} = \frac{\delta W}{\delta v^a}. \tag{27}$$

Substitusi hasil ini ke dalam persamaan (26) memberikan identitas Nielsen:

$$\int dx\left[\frac{\delta\Gamma}{\delta u^{a\mu}}\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\varpi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta v^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\chi^a} + C^a\frac{\delta\Gamma}{\delta\chi^{*a}} + \gamma\frac{\delta\Gamma}{\delta\lambda}\right] = 0. \tag{28}$$

Turunan fungsional terhadap χ^{*a} dapat diganti dengan turunan fungsional terhadap $u^{a\mu}$ dengan bantuan persamaan medan hantu

$$0 = \left\langle -G_\mu D^{ab\mu}\chi^b + \xi^a - \frac{\gamma}{2}C^a\right\rangle = G^\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta u^{a\mu}} - \frac{\delta\Gamma}{\delta\chi^{*a}} - \frac{\gamma}{2}C^a \tag{29}$$

sehingga identitas Nielsen menjadi

$$\int dx\left[\frac{\delta\Gamma}{\delta u^{a\mu}}\left\{\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a} \pm G^\mu C^a\right\} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\varpi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta v^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\chi^a} - \gamma\frac{C^2}{2} + \gamma\frac{\delta\Gamma}{\delta\lambda}\right] = 0. \tag{30}$$

Pada suku kedua tanda + berlaku untuk kondisi Lorentz sedangkan tanda - untuk kondisi-kondisi gauge dengan G^μ tidak mengandung operator derivatif, seperti kondisi aksial, dan Fock-Schwinger. Perhatikan bahwa identitas Nielsen (30) tampak berbeda dengan identitas BRST (10). Namun sebenarnya kedua identitas tersebut ekivalen. Hal ini karena dua suku terakhir dari (30), suku-suku yang membedakan identitas Nielsen dari identitas BRST, saling menghilangkan.

Identitas Nielsen untuk kasus QED, yaitu persamaan (20), dapat diperoleh dari identitas (30) dengan mengambil indeks internal $a=b=c$ sehingga suku $\delta\Gamma/\delta v$ dan $\delta\Gamma/\delta u^\mu$ pada (30) berturut-turut menjadi nol dan $\partial_\mu\chi$.

4. Cara Lain Penurunan Identitas Nielsen

Identitas Nielsen dapat pula diturunkan dengan menerapkan transformasi BRST (2+9) pada, ambil kasus QCD, fungsional pembangkitan (22). Mengingat transformasi BRST adalah transformasi medan sedangkan fungsional pembangkitan bukan fungsional bagi medan maka fungsional tersebut invarian terhadap transformasi BRST. Oleh karena itu

$$\begin{aligned} 0 &= \delta Z[J,\overline{\eta},\eta,K,\lambda,\varpi,\omega,\xi^*,\xi,u,v] \\ &= \int dx\int D[A\overline{\psi}\psi C\chi^*\chi] \\ &\Big\{(\delta A_\mu^a)J^{a\mu} + \overline{\eta}\delta\psi + (\delta\overline{\psi})\eta + \xi^{*a}\delta\chi^a \\ &+ (\delta\chi^{*a})\xi^a + \frac{\gamma}{2}C^a\delta\chi^{*a}\Big\}\exp iS \end{aligned} \tag{31}$$

dengan

$$S = \int dx\begin{bmatrix} L + A_\mu^a J^{a\mu} + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta + C^a K^a \\ + \xi^{*a}\chi^a + \chi^{*a}\xi^a + ig\chi^a\varpi T^a\psi \\ - ig\overline{\psi}\chi^a T^a\omega - gv^a f^{abc}\chi^b\chi^c + u^{a\mu}D_\mu^{ab}\chi^b \end{bmatrix} \tag{32}$$

Sifat nilpoten dari medan terhadap transformasi BRST telah dimanfaatkan untuk mendapatkan ungkapan di atas. Selanjutnya transformasi (2+9), persamaan (27) dan $\delta Z/i\delta\lambda = C^2 Z/2$ menyebabkan ungkapan tersebut dapat dituliskan menjadi

$$\int dx\left\{J^{a\mu}\frac{\delta Z}{i\delta u^{a\mu}} - \overline{\eta}\frac{\delta Z}{i\delta\varpi} + \frac{\delta Z}{i\delta\omega}\eta + C^a\xi^a Z - \xi^{*a}\frac{\delta Z}{i\delta v^a} - \gamma\frac{\delta Z}{i\delta\lambda}\right\} = 0\,. \tag{33}$$

Aksi efektif (25) memungkinkan kita untuk menuliskan sumber eksternal dalam bentuk turunan fungsional aksi efektif terhadap medan terkait. Jika ini dan ungkapan (27) dimanfaatkan maka identitas di atas dapat dituliskan dalam bentuk turunan fungsional dari aksi efektif sebagai berikut:

$$\int dx\left\{\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta u^{a\mu}} - \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varpi} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}} + C^a\frac{\delta\Gamma}{\delta\chi^{*a}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\chi^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta v^a} + \gamma\frac{\delta\Gamma}{\delta\lambda}\right\} = 0 \tag{34}$$

atau, setelah memanfaatkan (29)

$$\int dx\left\{\frac{\delta\Gamma}{\delta u^{a\mu}}\left[\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a} \pm G^\mu C^a\right] + \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varpi} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta v^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\chi^a} - \frac{\gamma}{2}C^2 + \gamma\frac{\delta\Gamma}{\delta\lambda}\right\} = 0. \tag{35}$$

Perhatikan bahwa hasil ini identik dengan identitas Nielsen (30). Satu hal yang perlu dicatat adalah bahwa identitas (35) diperoleh atas dasar transformasi BRST sehingga identitas tersebut tidak lain adalah identitas BRST. Dan ini sebenarnya memang identik dengan identitas BRST (10) sebagaimana telah dijelaskan pada bagian sebelumnya. Ekivalensi antara kedua identitas tersebut menjamin ketidakbergantungan proses-proses fisis terhadap parameter gauge.

5. Kesimpulan

Telah diturunkan identitas Nielsen, baik untuk kasus QED maupun QCD, pada kondisi gauge $G^\mu A_\mu=0$ dengan G^μ sama dengan ∂^μ (kondisi Lorentz) atau sembarang vektor yang tidak mengandung operator koordinat (misalnya kondisi aksial dan Fock-Schwinger). Penurunannya dilakukan dengan dua cara. Penurunan dengan cara pertama serupa dengan cara yang dilakukan pada referensi, yaitu dimulai dengan sifat invariannya aksi efektif terhadap transformasi BRST yang diperluas. Sedikit perbedaan terletak pada pemilihan kondisi gauge. Di dalam referensi kondisi gauge yang dipakai adalah kondisi Lorentz sedangkan di sini tidak hanya kondisi Lorentz. Jika cara pertama memanfaatkan sifat invarian dari aksi efektif maka cara kedua memanfaatkan sifat invarian dari fungsional pembangkitan terhadap transformasi BRST (bukan transformasi BRST yang diperluas) di mana rapat Lagrangian yang dipakai adalah rapat Lagrangian yang telah dimodifikasi (persamaan (12)). Secara formal, identitas yang diperoleh dari cara kedua bernama identitas BRST karena simetri yang terkait adalah simetri BRST (namun dengan Rapat Lagrangian yang dimodifikasi). Oleh karena itu dapat disimpulkan, khususnya untuk kasus yang ditinjau di sini, bahwa identitas Nielsen ekivalen dengan identitas BRST.

Daftar Pustaka

1. L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1985.
2. T. Muta, *Foundation of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, 1987.
3. A.A. Slavnov, *Theor. Math. Phys*. **10**, (1972) 99.
4. J. C. Taylor, *Nucl. Phys*. **B33**, (1971) 436
5. R. Delbourgo, Triyanta, *Int. J. Mod. Phys*. **A33** (1992) 5833.
6. W. Kummer, J. Weiser, *Z. Phys*. **C31**, (1986) 105.
7. C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Comm. Math. Phys*. **42**, (1975) 127.
8. I.V. Tyutin, *FIAN* **39** (1975).
9. J.C. Breckenridge, M.J. Lavelle, T.G. Steele, *Z. Phys*. **C65**, (1995) 155, hep-th/9407028.
10. N.K. Nielsen, *Nucl. Phys*. **B101** (1975) 173.
11. D. Johnston, *Nucl. Phys*. **B253** (1985) 687
12. D.A. Johnston, Imperial/TP/85-86/36.
13. A.F. de Lima, D. Bazeia, UFPB-DF 01/89A.
14. C. Contreras, L. Vergara, *Phys. Rev*. **D55** (1997) 5241, hep-th/9610109.
15. O.M. Del Cima, D.H.T. Franco, O. Piguet, *Nucl. Phys*. **B551** (1999) 813, hep-th/9902084.
16. P. Gambino, P.A. Grassi, *Phys. Rev*. **D62** (2000) 076002, hep-th/9907254.
17. O.M. Del Cima, *Phys. Lett*. **B457** (1999) 307, hep-th/9903004.